

Zur Berechnung von Eigenwerten

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 32, 1981,
S.67-73



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Berechnung von Eigenwerten

Von **Hans-Joachim Kowalsky**, Braunschweig

(eingegangen am 4.9.1981)

Das bekannte Potenzverfahren zur Berechnung des Betrags von Eigenwerten quadratischer Matrizen versagt besonders dann, wenn verschiedene Eigenwerte annähernd gleichen Betrages auftreten. Diese Schwierigkeiten können durch Kopplung mit einem einfachen Algorithmus zur Berechnung von Minimalpolynomen weitgehend behoben werden. Die Anwendung auf Begleitmatrizen ergibt ein Verfahren, das automatisch alle Nullstellen eines gegebenen Polynoms liefert.

1. Minimalpolynome

Nachstehend bedeute Φ stets eine gegebene lineare Abbildung des \mathbb{R}^n in sich. Hinsichtlich der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n entspricht also Φ eine (n,n) -Matrix A , so daß für jeden Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und seinen Bildvektor $\Phi\mathbf{x} = (y_1, \dots, y_n)$

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) A$$

gilt. Ausgehend von einem beliebigen Startvektor $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$, bilde man nun die Bildvektoren $\Phi\mathbf{e}, \Phi^2\mathbf{e}, \Phi^3\mathbf{e}, \dots$ und prüfe bei jedem Schritt, ob der gerade gewonnene Vektor von den vorangehenden linear abhängig ist. Wenn dies beim r -ten Schritt erstmalig der Fall ist, gilt jedenfalls $r \leq n$ und mit geeigneten Koeffizienten

$$\Phi^r\mathbf{e} + b_{r-1}(\Phi^{r-1}\mathbf{e}) + \dots + b_1(\Phi\mathbf{e}) + b_0\mathbf{e} = \mathbf{o}.$$

Die Vektoren $\mathbf{e}, \Phi\mathbf{e}, \dots, \Phi^{r-1}\mathbf{e}$ spannen dann einen Φ -invarianten Unterraum U auf, so daß die Restriktion Φ_U von Φ auf U eine lineare Abbildung $\Phi_U: U \rightarrow U$ ist, und

$$Q(t) = t^r + b_{r-1}t^{r-1} + \dots + b_1t + b_0$$

ist gerade das Minimalpolynom von Φ_U , das seinerseits ein Teiler des Minimalpolynoms von Φ ist.

Wie in [1, p. 78 ff.] ausgeführt ist, liefert eine entsprechende Fortsetzung des Verfahrens ein übersichtliches Schema zur Berechnung des Minimalpolynoms von Φ , das überdies meist kürzer ausfällt, als dies bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms der Fall ist. Die jeweilige Überprüfung der linearen Unabhängigkeit erfolgt bei dem dort geschilderten Schema in üblicher Weise mit Hilfe elementarer Umformungen. Für eine Programmierung des Verfahrens ist es jedoch günstiger, das bekannte Orthonormalisierungsprinzip zu benutzen.

Die kanonische Basis des \mathbb{R}^n diene als Orthonormalbasis, und ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde der Startvektor \mathbf{e} als normiert vorausgesetzt ($|\mathbf{e}|=1$). Durch die folgende Induktionsvorschrift wird dann ein Orthonormalsystem $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ bestimmt, das denselben Unterraum U erzeugt, wie vorher die Vektoren $\mathbf{e}, \Phi\mathbf{e}, \dots, \Phi^{r-1}\mathbf{e}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}, \\ \mathbf{e}'_{k+1} &= \Phi\mathbf{e}_k - \sum_{\kappa=1}^k a_{k,\kappa}\mathbf{e}_\kappa \quad \text{mit } a_{k,\kappa} = (\Phi\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_\kappa, \\ \mathbf{e}_{k+1} &= \frac{1}{u_k}\mathbf{e}'_{k+1} \quad \text{mit } u_k = |\mathbf{e}'_{k+1}| \quad (k=1, \dots, r-1). \end{aligned}$$

Die Zahl r ist hierbei dadurch bestimmt, daß $u_k > 0$ für $k < r$, aber $u_r = 0$ gilt. Bei numerischen Rechnungen ist die Bedingung $u_r = 0$ natürlich durch $u_r < \varepsilon$ mit einer geeigneten Fehlerschranke ε zu ersetzen.

Für die durch $\mathbf{e}_k = P_k(\Phi)\mathbf{e}_1$ definierten Polynome ergibt sich aus (1)

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\Phi)\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_{k+1} = \frac{1}{u_k}(\Phi\mathbf{e}_k - \sum_{\kappa=1}^k a_{k,\kappa}\mathbf{e}_\kappa) \\ &= \frac{1}{u_k}(\Phi P_k(\Phi) - \sum_{\kappa=1}^k a_{k,\kappa}P_\kappa(\Phi))\mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

also

$$(2) \quad P_{k+1}(\Phi) = \frac{1}{u_k}(\Phi P_k(\Phi) - \sum_{\kappa=1}^k a_{k,\kappa}P_\kappa(\Phi)) \quad \text{für } k < r,$$

und

$$(3) \quad Q(t) = tP_r(t) - \sum_{\kappa=1}^r a_{r,\kappa}P_\kappa(t)$$

ist das Minimalpolynom von $\Phi|_U$, das allerdings noch nachträglich normiert werden muß, um Übereinstimmung mit dem oben ebenso bezeichneten Polynom zu erzielen. Zur Berechnung der Koeffizienten von Q setze man zunächst die Polynome P_k in der Form

$$P_k(t) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} c_{k,\lambda} t^\lambda$$

an. Mit Hilfe von (2) erhält man dann für die Koeffizienten die Rekursionsvorschrift

$$(4) \quad \begin{aligned} c_{1,0} &= 1, \\ c_{k+1,0} &= -\frac{1}{u_k} \sum_{\kappa=1}^k a_{k,\kappa} c_{\kappa,0}, \quad c_{k+1,k} = \frac{1}{u_k} c_{k,k-1}, \\ c_{k+1,\lambda} &= \frac{1}{u_k} (c_{k,\lambda-1} - \sum_{\kappa=\lambda+1}^k a_{k,\kappa} c_{\kappa,\lambda}) \quad (\lambda=1, \dots, k-1; k < r), \end{aligned}$$

und die Koeffizienten b_0, \dots, b_r des Minimalpolynoms Q ergeben sich entsprechend aus (3) zu

$$(5) \quad \begin{aligned} b_0 &= -\sum_{\kappa=1}^r a_{r,\kappa} c_{\kappa,0}, \quad b_r = c_{r,r-1}, \\ b_q &= c_{r,q-1} - \sum_{\kappa=q+1}^r a_{r,\kappa} c_{\kappa,q} \quad (q=1, \dots, r-1). \end{aligned}$$

Bei Verwendung dieser Rekursionsgleichungen (4) und (5) gestattet das gesamte Verfahren eine übersichtliche und einfache Programmierung.

2. Eigenwertberechnung

Wenn bei gegebenem Startvektor $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ die Vektoren $\mathbf{x}_0, \Phi\mathbf{x}_0, \dots, \Phi^{n-1}\mathbf{x}_0$ nicht im Kern von Φ liegen, sind die durch die Rekursionsvorschrift

$$(6) \quad \mathbf{y}_k = \frac{1}{\|\mathbf{x}_k\|} \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{y}_k$$

definierten Vektorfolgen bildbar, und die Folge (\mathbf{y}_k) konvergiert jedenfalls dann gegen einen Eigenvektor von Φ , wenn diese Abbildung nur einen reellen (evtl. mehrfachen) Eigenwert maximalen Betrages besitzt ([2], [3]). Hier interessiert allerdings der allgemeine, nicht dieser Einschränkung unterworfen Fall. Da er in der Literatur im allgemeinen nicht eingehender behandelt wird, soll er hier etwas genauer dargestellt werden.

Hinsichtlich einer geeigneten Basis des zum \mathbb{C}^n erweiterten \mathbb{R}^n entspricht Φ eine Matrix in Jordan'scher Normalform, die also die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_r \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Untermatrizen der Form

$$B_q = \begin{pmatrix} c_q & 1 & & \\ & c_q & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & c_q & 1 \\ & & & & c_q \end{pmatrix} \quad (q = 1, \dots, r)$$

besitzt. Die im allgemeinen komplexen Zahlen c_1, \dots, c_r sind die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von Φ . Ferner besitze für $q = 1, \dots, r$ die Untermatrix B_q die Zeilenzahl n_q .

Dem Zerfall der Matrix B in Untermatrizen entspricht eine Zerlegung des \mathbb{C}^n in eine direkte Summe von Unterräumen V_1, \dots, V_r mit $\dim V_q = n_q$ ($q = 1, \dots, r$). Daher besitzen die Vektoren \mathbf{y}_k und $\mathbf{a}_k = \Phi^k \mathbf{x}_0$ Darstellungen

$$(7) \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k,1} + \dots + \mathbf{y}_{k,r}, \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{k,1} + \dots + \mathbf{a}_{k,r}$$

mit $\mathbf{y}_{k,q}, \mathbf{a}_{k,q} \in V_q$ ($q = 1, \dots, r$).

Nun gilt $\mathbf{y}_k = \frac{1}{\|\mathbf{a}_k\|} \mathbf{a}_k$, und der Betrag von \mathbf{a}_k kann mit Hilfe einer nicht von k abhängenden Konstanten s in der Form

$$(8) \quad \|\mathbf{a}_k\| \geq s M_k \quad \text{mit} \quad M_k = \max \{ \|\mathbf{a}_{k,1}\|, \dots, \|\mathbf{a}_{k,r}\| \}$$

abgeschätzt werden ([2], p. 16). Damit folgt

$$(9) \quad |y_{k,q}| \leq \frac{1}{sMk} |a_{k,q}| \quad (q = 1, \dots, r).$$

Hinsichtlich der zugrundegelegten Basis seien jetzt $(x_{q,1}^k, \dots, x_{q,n_q}^k)$ die Koordinaten von $a_{k,q}$ im Unterraum V_q . Wegen $a_o = x_o$, also $a_k = \Phi^k a_o$, gilt dann

$$(x_{q,1}^k, \dots, x_{q,n_q}^k) = (x_{q,1}^o, \dots, x_{q,n_q}^o) B_q^k,$$

und mit Hilfe vollständiger Induktion ergibt sich

$$(10) \quad x_{q,v}^k = \sum_{\mu=1}^v \binom{k}{v-\mu} c_q^{k+\mu-v} x_{q,\mu}^o \quad (q = 1, \dots, r; v = 1, \dots, n_q).$$

Mit

$$(11) \quad A_{k,q} = \binom{k}{n_q-1} c_q^{k+1-n_q}$$

gilt im Fall $v-\mu < n_q-1$

$$\frac{1}{A_{k,q}} \binom{k}{v-\mu} c_q^{k+\mu-v} = \frac{(n_q-1)!}{(v-\mu)!} \frac{1}{(k-v+\mu) \dots (k-n_q+2)} c_q^{n_q+\mu-v-1},$$

also

$$(12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{A_{k,q}} \binom{k}{v-\mu} c_q^{k+\mu-v} = 0.$$

Es folgt

$$(13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{q,v}^k}{A_{k,q}} = \begin{cases} 0 & \text{für } v < n_q \\ x_{q,1}^o & v = n_q \end{cases}$$

und daher

$$(14) \quad h_q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{A_{k,q}} a_{k,q} = (0, \dots, 0, x_{q,1}^o).$$

Dieser Grenzvektor ist im Fall $x_{q,1}^o \neq 0$ gerade ein Eigenvektor der Matrix B_q .

Die Voraussetzung $x_{q,1}^o \neq 0$ kann allerdings nicht garantiert werden. Man hat zwar die Wahl des Startvektors frei; da aber die der Jordan'schen Normalform zugrundeliegende Basis nicht bekannt ist, kann man auch keine Aussagen über das Nichtverschwinden bestimmter Koordinaten machen. Bei unglücklicher Wahl des Startvektors kann sogar $a_{o,q} = o$ für einzelne Indizes q gelten. Und im Fall $a_{o,q} \neq o$ kann $x_{q,p}^o \neq 0$ erst für einen ersten Index $p > 1$ erfüllt sein. Dieses hat aber lediglich die Konsequenz, daß dieselben Überlegungen mit der um die ersten $p-1$ Zeilen und Spalten verkleinerten Matrix B_q durchgeführt werden können. Nur ist dann, insbesondere in der Definition von $A_{k,q}$, die Zahl n_q durch $n_q - p + 1$ zu ersetzen. Auf diese Bemerkung wird weiter unten noch einmal zurückgegriffen.

Aus (14) folgt noch für hinreichend große k

$$(15) \quad \frac{1}{2} |x_{q,1}^o| |A_{k,q}| \leq |a_{k,q}| \leq 2 |x_{q,1}^o| |A_{k,q}|.$$

Damit ergibt sich für zwei Indizes q, σ mit $x_{q,1}^o \neq 0, c_q \neq 0$ für hinreichend große k mit von k unabhängigen Konstanten d', d

$$(16) \quad \frac{|a_{k,\sigma}|}{|a_{k,\varrho}|} \leq d, \quad \frac{\binom{k}{n_\sigma-1} |c_\sigma|^{k+1-n_\sigma}}{\binom{k}{n_\varrho-1} |c_\varrho|^{k+1-n_\varrho}} \leq d k^{n_\sigma-n_\varrho} \left| \frac{c_\sigma}{c_\varrho} \right|^{k+1}.$$

Es folgt

$$(17) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k,\sigma}|}{|a_{k,\varrho}|} = 0 \quad \text{für } |c_\varrho| > |c_\sigma| \quad \text{und für } |c_\varrho| = |c_\sigma|, n_\varrho > n_\sigma.$$

In (8) wird daher das Maximum M_k für einen solchen Index angenommen, dessen zugehöriger Eigenwert maximalen Betrag hat, so daß dieser Index bei großen k nicht mehr von k abhängt.

Weiter gelte $|c_1| = \dots = |c_q| > |c_{q+1}| \geq \dots \geq |c_r|$ und außerdem $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$. Wegen (9) und (17) folgt

$$(18) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{k,\varrho} = 0 \quad \text{für } \varrho \geq q+1,$$

und diese Gleichung gilt im allgemeinen sogar noch für solche $\varrho \leq q$, bei denen nur $n_\varrho < n_1$ erfüllt ist. Wegen der obigen Bemerkung über das Verschwinden von Koordinaten des Startvektors sind in diesen letzten Fällen aber keine sicheren Aussagen möglich. Wenn jedoch für Indizes $\varrho, \sigma \leq q$ die Gleichung (18) nicht gilt, so ist jedenfalls $|A_{k,\varrho}| = |A_{k,\sigma}|$ erfüllt. Die Folge $(y_{k,\varrho})_{k \in \mathbb{N}}$ wird dann zwar im allgemeinen nicht konvergieren. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt jedoch wegen (14) mit dem Eigenvektor b_ϱ für hinreichend große k

$$|y_{k,\varrho} - a_{k,\varrho} b_\varrho| < \varepsilon,$$

wobei allerdings die Zahlenfolge $(a_{k,\varrho})_{k \in \mathbb{N}}$ im allgemeinen wieder nicht konvergiert.

Zusammenfassend hat sich damit folgender Sachverhalt ergeben. Es seien $\varrho_1, \dots, \varrho_m$ diejenigen Indizes ϱ , für die die Folge $(y_{k,\varrho})_{k \in \mathbb{N}}$ nicht gegen den Nullvektor konvergiert, und U sei der von den entsprechenden Eigenvektoren $b_{\varrho_1}, \dots, b_{\varrho_m}$ aufgespannte Unterraum. Dann gilt:

Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es zu jedem hinreichend großen k einen Vektor $u_k \in U$ mit $|y_k - u_k| < \varepsilon$.

Die Vektoren u_k sind lediglich Linearkombinationen von Eigenvektoren, im allgemeinen aber nicht selbst Eigenvektoren. Dies ist jedoch jedenfalls dann gewährleistet, wenn alle beteiligten Eigenwerte gleich (und nicht nur betragsmäßig gleich) sind.

Bei hinreichend großem k wende man nun auf y_k als Näherung von u_k und als neuen Startvektor das im ersten Abschnitt besprochene Verfahren an. Man erhält dann ein Polynom Q , dessen Nullstellen näherungsweise die Eigenwerte $c_{\varrho_1}, \dots, c_{\varrho_m}$ oder auch nur einige von ihnen sind.

Das so beschriebene Verfahren bedarf noch einiger ergänzender Erläuterungen.

Einem mehrfachen reellen Eigenwert entspricht im Polynom Q doch immer nur ein Linearfaktor und einem komplexen Eigenwert ein quadratischer Faktor. Das Polynom Q kann also nur dann einen höheren Grad besitzen, wenn tatsächlich ent-

sprechend viele verschiedene Eigenwerte gleichen Betrages auftreten. Aber auch in diesem Fall wird man die Eigenwerte meist einfach berechnen können, da ja die Kenntnis des gemeinsamen Betrages graderniedrigend wirkt.

Ein höherer Grad von Q kann auch dann auftreten, wenn Beträge von Eigenwerten nicht wesentlich verschieden sind, so daß sie bei der gewählten Schrittzahl noch nicht hinreichend getrennt wurden. Wenn Q also Nullstellen nicht nur annähernd eines Betrags aufweist, ist dies ein Hinweis darauf, daß mit höherer Schrittzahl eine bessere Trennung erreicht werden kann.

Bei deutlich verschiedenen Eigenwerten mit gleichem Betrag kann man durch den Übergang von A zur Matrix $A - aE$ mit geeignetem $a \in \mathbb{R}$ stets auch eine betragsmäßige Trennung erreichen, so daß man es dann nur noch mit linearen und quadratischen Polynomen zu tun hat.

Die im zweiten Teil des Verfahrens gewonnene Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ des invarianten Unterraums U kann zu einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \dots, \mathbf{e}_n\}$ des ganzen \mathbb{R}^n verlängert werden. Die mit den Zahlen

$$d_{\mu, \nu} = (\Phi \mathbf{e}_\mu) \cdot \mathbf{e}_\nu \quad (\mu, \nu = r+1, \dots, n)$$

gebildete Matrix beschreibt dann gerade den von Φ induzierten Endomorphismus des Quotientenraums \mathbb{R}^n/U . Wendet man das Verfahren auf diese neue, kleinere Matrix an, so erhält man weitere Eigenwerte von Φ , so daß man bei hinreichender Genauigkeit schrittweise alle Eigenwerte gewinnt. Allerdings werden hierbei mehrfache Eigenwerte auch mehrfach berechnet, so daß es unter Umständen zweckmäßiger ist, zunächst den Unterraum U durch Hinzunahme seiner iterierten Urbilder zu erweitern. Andererseits liefert das Verfahren außer den Eigenwerten auch noch Basen für die jeweiligen Unterräume, so daß eine Mehrfachberechnung auch von Interesse sein kann.

3. Anwendung auf Polynome

Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts können zur schematischen Faktorisierung eines gegebenen Polynoms

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$$

benutzt werden. Man wende nämlich wie üblich das besprochene Verfahren auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

an, die P als charakteristisches Polynom besitzt. Nach dem ersten Durchgang erhält man ein Polynom Q_1 mit $P = Q_1 P_1$. (Der evtl. auftretende Rest liefert ein Gütemaß für die Approximation.) Nach Division kann man einen neuen Durchgang mit P_1

statt P durchführen. So fortfahrend erhält man eine Faktorisierung $P = Q_1 Q_2 \dots Q_s$, wobei in den Faktoren Nullstellen gleichen Betrags zusammengefaßt werden.

Da eine mehrfache Nullstelle von P in den Faktorpolynomen nur als einfache Nullstelle auftritt, muß sie in entsprechend vielen Faktoren vorkommen. Es ist daher zweckmäßig, zuvor mehrfache Nullstellen mit dem euklidischen Algorithmus auszuschalten. Da man außerdem, falls erforderlich, den Fall verschiedener Nullstellen gleichen Betrages durch eine geeignete Translation beseitigen kann, hat man dann ein Verfahren, das automatisch eine Zerlegung von P in lineare und quadratische Faktoren bewirkt.

Literatur

- [1] H.-J. Kowalsky, Lineare Algebra, 9. Aufl., de Gruyter 1979.
- [2] H.-J. Kowalsky, Vektorenanalysis I, de Gruyter 1974.
- [3] G. Schmeißer – H. Schirmeier, Praktische Mathematik, de Gruyter 1976.